Colle 9 : Équations différentielles-Calcul d'intégrales

Preuves à connaître

Proposition 1 Formulaire pour intégrer des éléments simples (Encore une fois !)

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-a} = \ln|x-a| + \lambda$$

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^n} = \frac{\text{Cte}}{(x-a)^{n-1}} + \lambda \quad (n \geqslant 2)$$

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + \lambda \quad (a \neq 0)$$

$$\int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + \lambda$$

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} \quad (n \geqslant 2) \quad \text{on pose } t = a\tan\theta \quad \text{soit} \quad \theta = \operatorname{Arctan}\frac{t}{a}$$

$$\int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} = \frac{\text{Cte}}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \lambda \quad (n \geqslant 2)$$

Proposition 2 Exemple de dérivation d'une fonction à valeurs complexes

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable et $f = \exp(\varphi)$, définie sur I par $f(x) = \exp(\varphi(x))$.
Alors f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \varphi'(x)\exp(\varphi(x))$.

Proposition 3 Exemple 2

Soit a un nombre complexe non réel. Calculer $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-a}$.

Proposition 4 Structure de l'ensemble des solutions (ordre 1)

La solution générale de

$$(E) \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$.

Proposition 5 Principe de superposition (ordre 1)

Soit $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de complexes. Considérons l'équation différentielle

$$(E) : y' + ay = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k$$

Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, y_k est une solution particulière de $(E_k) : y' + ay = b_k$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k$ est une solution particulière de (E).

Proposition 6 Solution générale de l'équation homogène

$y' + ay = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, y = \lambda e^{-A}$ avec A une primitive de a sur I.

Proposition 7 Problème de Cauchy

Étant donnés $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

Proposition 8 Structure de l'ensemble des solutions (ordre 2)

La solution générale de

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = g(x)$$

est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation homogène associée $ay'' + by' + cy = 0$.

À savoir faire

- ☐ Résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec second membre (méthode de variation de la constante) : pas d'équations différentielles d'ordre 2 cette semaine.
- ☐ Savoir utiliser les règles de Bioche. Calculer des intégrales de fonctions à valeurs complexes.
- ☐ Calcul de primitives et d'intégrales utilisant des intégrations par parties, des changements de variables. Savoir intégrer des fractions rationnelles (avec une indication pour la décomposer en éléments simples)

Le programme officiel

B - Primitives et équations différentielles linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Calcul de primitives (La fin)	
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales. Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$. Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants (Le début)	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène Pas terminé Principe de superposition.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.