

Correction du DS n°3.

Durée : 4 heures

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant : la présentation est notée sur 2 points.

Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroté vos copies avant de les rendre.

La calculatrice est interdite.

Question de cours

Voir le cours

Exercice 1

Posons $A = \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}$.

$$\text{Alors } \tan(A) = \tan \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8} \right) \right) = \frac{\frac{1}{2} + \tan \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8} \right)}{1 - \frac{1}{2} \tan \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8} \right)}$$

$$\text{Or, } \tan \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8} \right) = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{5} \times \frac{1}{8}} = \frac{1}{3} \text{ d'où } \tan(A) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$$

Donc $A = \frac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ et $\frac{1}{8}$ sont dans $]0, 1[$ donc $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2}, \operatorname{Arctan} \frac{1}{5}$ et $\operatorname{Arctan} \frac{1}{8}$ sont dans $]0, \frac{\pi}{4}[$ comme arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où, $0 < A < \frac{3\pi}{4}$ soit $0 < \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{3\pi}{4} \iff -\frac{1}{4} < k < \frac{1}{2}$. Comme $k \in \mathbb{Z}$, on a $k = 0$.

Conclusion : $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 2

La fonction est bien définie pour les réels $x \neq 1$ tels que $-1 \leq \frac{1+x}{1-x} \leq 1$. Or, $\frac{1+x}{1-x} = \frac{2+x-1}{1-x} = \frac{2}{1-x} - 1$.

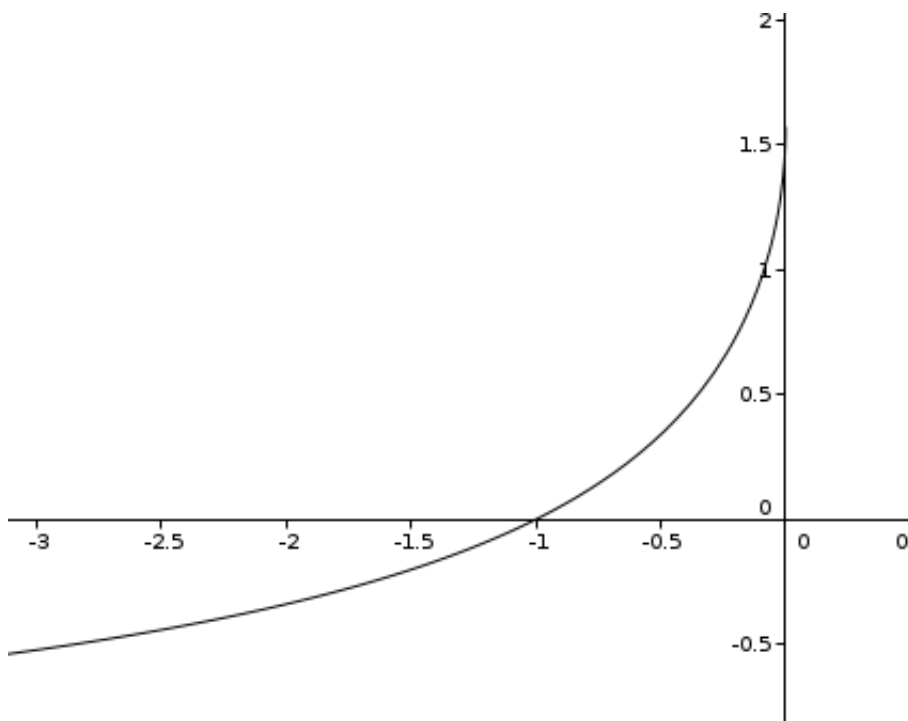
On en déduit que $-1 \leq \frac{1+x}{1-x} \leq 1 \iff 0 \leq \frac{2}{1-x} \leq 2$.

Ceci impose d'abord que $1-x > 0$ pour que l'inégalité de gauche soit vérifiée, c'est-à-dire $x < 1$. On en déduit alors que l'inégalité est équivalente à $1 \leq 1-x$ soit $x \leq 0$. Le domaine de définition de la fonction est donc $\mathbb{R}_-$. Son domaine de dérivabilité est $] -\infty, 0[$. En effet, par composition, f est dérivable en tout réel $x \neq 1$ tel que $-1 < \frac{1+x}{1-x} < 1$ et l'étude précédente reste valable avec des inégalités strictes et non des inégalités larges. Dérivons ensuite la fonction. Pour tout $x < 0$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - 1 - \frac{4}{(1-x)^2} + \frac{4}{1-x}}} \\ &= \frac{1}{(1-x)\sqrt{-x}} > 0. \end{aligned}$$

La fonction est donc strictement croissante sur $] -\infty, 0[$. On aurait pu également retrouver ce résultat en remarquant que la fonction $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est croissante sur $] -\infty, 0[$ et que la fonction Arcsin est croissante sur $] -1, 1[$. Par composition de deux fonctions croissantes, f est croissante. Enfin, puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x}{1-x} = -1$

on en déduit par composition que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\pi/2$. La courbe représentative de la fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\pi/2$. On obtient la courbe représentative suivante :



Exercice 3

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$

1. On fait l'étude de la fonction : comme le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ donc est du même signe que $1-x^2$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		
f	0		$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

En utilisant le TVI, on obtient que $\frac{1}{2}$ admet un antécédent sur l'intervalle $[-1, 1]$ et un autre sur $[1, +\infty[$, donc f n'est pas injective. Par ailleurs, f est majorée par 1, donc 2 n'admet pas d'antécédent : f n'est donc pas surjective.

2. $f([0;3]) = f([0;1]) \cup f([1;3]) = [f(0);f(1)] \cup [f(3);f(1)] = [0;1] \cup [f(3);1] = [0;1]$
3. En utilisant le théorème de la bijection sur l'intervalle $[-1;1]$ pour la fonction f qui y est continue et strictement croissante, on obtient que $f([-1;1])$ est un intervalle, qui est encore $[-1;1]$ et que f réalise une bijection de $[-1;1]$ vers $[-1;1]$.
4. Soit $y \in [-1;1]$ on résout $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$ il s'agit d'une équation du second degré SAUF lorsque $y = 0$ (et dans ce cas l'unique solution est 0). Si $y \neq 0$ alors $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2) \geq 0$ car $y \in [-1;1]$. et les deux solutions sont $\frac{2 \pm \sqrt{4(1-y^2)}}{2y} = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}$. Parmi ces deux solutions, une seule a une valeur absolue plus petite que 1 (et fait donc partie de $[-1;1]$) et l'autre a une valeur absolue supérieure strictement à 1. Or parmi les deux valeurs obtenus, on sait que

$$\left| \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} \right| = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{|y|} \geq \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{|y|} = \left| \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \right|$$

donc parmi les deux solutions, celle dont la valeur absolue est la plus petite est celle avec le symbole $-$. On a donc $\forall y \in [-1;1] \setminus \{0\}, f^{-1}(y) = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y}$ et $f^{-1}(0) = 0$

Exercice 4

On pose $u = \cos(t) \in \mathcal{C}^1\left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right) \Rightarrow du = -\sin(t) dt$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin(t)}{-\cos(t)(1+\cos(t))} dt = - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u(1+u)} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du = [\ln|u| - \ln|1+u|]_{\frac{1}{2}}^1 = \left[\ln \left| \frac{u}{1+u} \right| \right]_{\frac{1}{2}}^1$$

donc $I = \ln \frac{3}{2}$.

Problème 1

1. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ soit $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos^{2n+1}(t) dt$
 On pose $\begin{cases} u(t) = \cos^{2n+1}(t) & u'(t) = -(2n+1)\sin(t)\cos^{2n}(t) \\ v'(t) = \cos(t) & v(t) = \sin(t) \end{cases}$ u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 $I_{n+1} = [\sin(t)\cos^{2n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{2n}(t) dt = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\cos^{2n}(t) dt$
 soit $I_{n+1} = (2n+1)(I_n - I_{n+1})$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n) = \ll I_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2} \gg$

• Au rang 0 : $\frac{(2 \times 0)!}{4^0(0!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = I_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ d'après } \mathcal{P}(n).$$

$$\text{donc } I_{n+1} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)^2} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}, \text{ donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.}$$

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

3. (a) On pose $\begin{cases} u(t) = \cos^{2n}(t) & u'(t) = -2n\sin(t)\cos^{2n-1}(t) \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{cases}$ u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$I_n = [t \cos^{2n}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \cos^{2n-1}(t) dt = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \cos^{2n-1}(t) dt$$

$$\text{On pose } \begin{cases} u(t) = \sin(t) \cos^{2n-1}(t) & u'(t) = \cos^{2n}(t) - (2n-1)\sin^2(t)\cos^{2n-2}(t) \\ v'(t) = t & v(t) = \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} I_n &= 2n \left[\frac{t^2}{2} \sin(t) \cos^{2n-1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} (\cos^{2n}(t) - (2n-1)\sin^2(t)\cos^{2n-2}(t)) dt \\ &= 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \cos^{2n}(t) dt - 2n(2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} (1-\cos^2(t)) \cos^{2n-2}(t) dt \end{aligned}$$

On obtient finalement $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2J_n$.

$$(b) \quad K_{n-1} - K_n = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2(n-1))!} J_{n-1} - \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} J_n = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} (2n(2n-1)J_{n-1} - 4n^2 J_n)$$

$$= \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} 2I_n = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} \times \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \pi \quad \text{d'où} \quad K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}.$$

(c) On somme membre à membre l'égalité précédente pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{k=1}^n K_{k-1} - K_k = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{4k^2} \text{ soit } K_0 - K_n = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Comme $K_0 = J_0$, on obtient :

$$\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n.$$

4. (a) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $f(x) = x - \frac{\pi}{2} \sin(x)$.

f est définie et dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 1 - \frac{\pi}{2} \cos(x)$.

$$f'(x) \geq 0 \iff \cos(x) \leq \frac{2}{\pi} \iff \arccos \frac{2}{\pi} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

f admet donc un minimum global en $\frac{\pi}{2}$. Or $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$, donc $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \leq 0$

soit $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \leq \frac{\pi}{2} \sin(x)$

$$(b) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq t^2 \cos^{2n}(t) \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2(t) \cos^{2n}(t) = \frac{\pi^2}{4} (1 - \cos^2(t)) \cos^{2n}(t)$$

Soit en intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4} (I_n - I_{n+1}) = \frac{\pi^2}{4} \frac{I_n}{2n+2} \quad \text{car } I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$

De plus, $K_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} J_n$ et $I_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2}$ soit $0 \leq \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} K_n \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)} \times \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{\pi}{2}$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$

(c) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^3}{16(n+1)} = 0$, on en déduit d'après le théorème d'encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0$.

De plus, $\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n$ donc, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que $\frac{\pi}{4} S = J_0 = \frac{\pi^3}{24}$ d'où

$$S = \frac{\pi^2}{6}.$$

Problème 2**Problème 2**

1. (a) sh et arctan sont dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{1 + \text{sh}^2(x)} = \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} \text{ donc } f'(x) = \frac{1}{\text{ch}(x)}.$$

- (b) Comme f est dérivable en 0, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(\text{sh}(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(\text{sh}(x))}{x} = 1$.

2. (a) • g est définie et continue ssi $\left| \frac{1}{\text{ch}(x)} \right| \leq 1$ et $\text{ch}(x) \neq 0 \iff |\text{ch}(x)| \geq 1$ et $\text{ch}(x) \neq 0$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) \geq 1$ donc g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

- g est dérivable ssi $\left| \frac{1}{\text{ch}(x)} \right| < 1 \iff |\text{ch}(x)| > 1 \iff \text{ch}(x) \neq 1 \iff x \neq 0$.

Finalement g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = -\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{ch}^2(x)}}} = -\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} \times \left| \frac{\text{ch}(x)}{\text{sh}(x)} \right| = -\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \times \frac{1}{|\text{sh}(x)|}$$

$\text{sh}(x)$ est du signe de x donc :

$$\forall x > 0, g'(x) = -\frac{1}{\text{ch}(x)} \text{ et } \forall x < 0, g'(x) = \frac{1}{\text{ch}(x)}$$

- (b) • $\forall x > 0, g'(x) = -f'(x)$ donc $\exists C_1 \in \mathbb{R}, \forall x > 0, g(x) = -f(x) + C_1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + f(x) = \text{Arcsin}(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = C_1 \text{ donc } \forall x > 0, g(x) = -f(x) + \frac{\pi}{2}$$

- $\forall x < 0, g'(x) = f'(x)$ donc $\exists C_2 \in \mathbb{R}, \forall x < 0, g(x) = f(x) + C_2$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - f(x) = \text{Arcsin}(0) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = C_2 \text{ donc } \forall x < 0, g(x) = f(x) + \frac{\pi}{2}$$

- (c) Pour $x > 0, \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{g(x) - \frac{\pi}{2}}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$

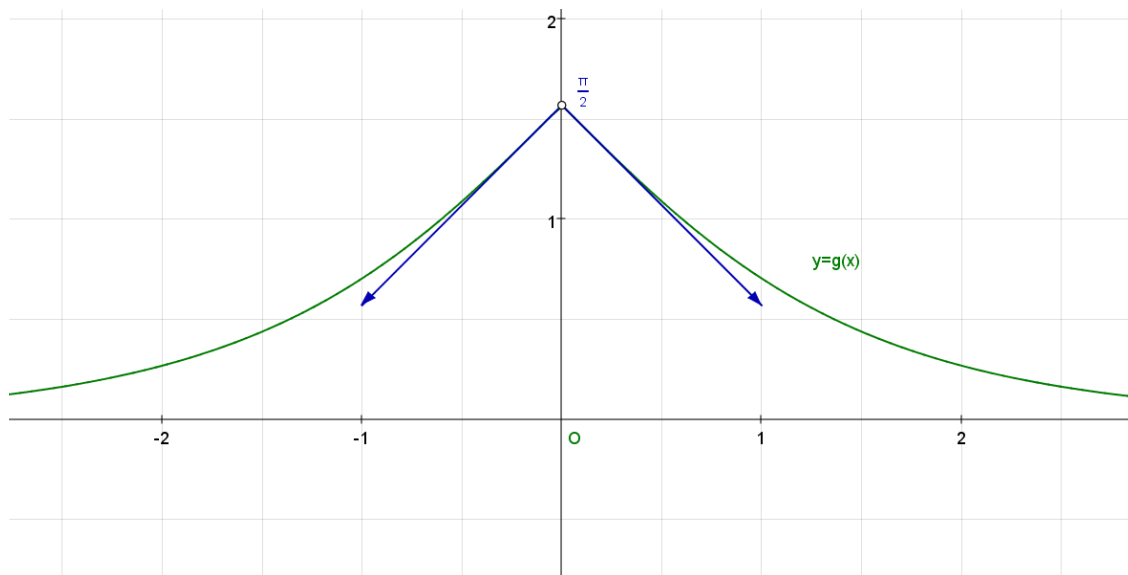
On en déduit, d'après la question 1 (b), que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 1$.

$$\text{Pour } x < 0, \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{g(x) - \frac{\pi}{2}}{x - 0} = -\frac{f(x)}{x}$$

On en déduit alors que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -1$.

g n'est donc pas dérivable en 0.

- (d) La courbe représentative de g admet donc deux demi-tangentes au point d'abscisse 0 de coefficient directeur -1 en 0^- et 1 en 0^+ . On peut remarquer que g est paire et est décroissante sur $[0, +\infty[$ car $g'(x) = -f'(x) = -\frac{1}{\text{ch}(x)} < 0$ sur $[0, +\infty[$.



3. th et $x \mapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc on résout l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

- $y_H' - \text{th}(x)y_H = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, y_H = \lambda e^{-A}$ avec $A = \int -\text{th}(x)dx = -\ln \text{ch}(x)$.

soit $y_H(x) = \lambda \text{ch}(x)$.

- On recherche une solution particulière y_p de la forme $y_p = \lambda \text{ch}$ avec λ dérivable sur $\mathbb{R}$.

y_p est solution ssi $y_p'(x) - \text{th}(x)y_p(x) = 1 \iff \lambda'(x) = \frac{1}{\text{ch}(x)}$.

D'après les questions précédentes on en déduit que $\lambda = f$ et $y_p(x) = f(x) \text{ch}(x)$.

Conclusion : y est solution de (E) ssi $y = y_H + y_p$ ssi $\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (\lambda + f(x)) \text{ch}(x)}$

4. (a) h_λ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$h_\lambda(x) = \frac{\varphi_\lambda'(x)}{\text{sh}(x)} = \frac{1 + \text{th}(x)\varphi_\lambda(x)}{\text{sh}(x)} = \frac{1}{\text{sh}(x)} + \text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \lambda.$$

On en déduit que $h_\lambda'(x) = \frac{\text{sh}(x)[\text{ch}(x)(\text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \lambda) + \text{th}(x)] - \text{ch}(x)[1 + \text{sh}(x)(\text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \lambda)]}{\text{sh}^2(x)}$

soit $h_\lambda'(x) = -\frac{1}{\text{ch}(x)\text{sh}^2(x)} < 0$.

Les limites s'obtiennent par composition sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$

(b) • Si $\lambda > \frac{\pi}{2}$ alors $\frac{\pi}{2} + \lambda > 0$ et $h_\lambda > 0$ sur $]0, +\infty[$.

• h_λ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, il s'agit donc d'une bijection de $]-\infty, 0[$ dans $\left] \lim_{x \rightarrow 0^+} h_\lambda(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} h_\lambda(x) \right[=]-\infty, -\frac{\pi}{2} + \lambda[$.

Comme $\lambda > \frac{\pi}{2}, 0 \in]-\infty, -\frac{\pi}{2} + \lambda[$ et $\boxed{\text{il existe un unique réel } a_\lambda < 0 \text{ tel que } h_\lambda \text{ s'annule}}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \lambda = \lambda - \frac{\pi}{2} > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_\lambda(x) = +\infty$.

$m_\lambda = \varphi_\lambda(a_\lambda)$ et $h_\lambda(a_\lambda) = 0 \iff \frac{1 + \text{th}(a_\lambda)\varphi_\lambda(a_\lambda)}{\text{sh}(a_\lambda)} = 0$ donc $\boxed{m_\lambda = \frac{-1}{\text{th}(a_\lambda)} > 0}$ car $a_\lambda < 0$.

(c) Pour $\lambda = \frac{\pi}{2}$, on remplit les tableaux de signe et de variations à l'aide de la question précédente.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_\lambda(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) \left(f(x) + \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) \text{Arcsin} \left(\frac{1}{\text{ch}(x)} \right)$$

soit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_\lambda(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\text{Arcsin}(t)}{t} = 1$ en posant $t = \frac{1}{\text{ch}(x)}$

(d) Pour $0 \leq \lambda < \frac{\pi}{2}$, on remplit les tableaux de signe et de variations à l'aide des questions 2 (a) et (b).

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(\text{sh}(x)) + \lambda = \lambda - \frac{\pi}{2} < 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_\lambda(x) = -\infty$.