

DS n°3.**Durée : 4 heures**

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant : la présentation est notée sur 2 points.

Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroté vos copies avant de les rendre.

La calculatrice est interdite.

Question de cours

Soit a une fonction continue sur un intervalle I . Rappelez quel est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(E) \quad \forall x \in I : y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

et démontrez ce résultat.

Exercice 1

Calculez la valeur de l'angle θ défini par :

$$\theta = \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}$$

Exercice 2

Soit f la fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$. Donner son domaine de définition, son domaine de dérivabilité, puis étudier et tracer la fonction.

Exercice 3

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$$

1. f est-elle injective ? Surjective ? (Les réponses doivent être justifiées)
2. Déterminer $f([0, 3])$.
3. Déterminer un ensemble $J \subseteq \mathbb{R}$ tel que $g : \begin{cases} [-1, 1] & \rightarrow J \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$ soit une bijection.
4. Calculer, pour tout $y \in J$, la valeur de $f^{-1}(y)$
5. Calculer l'image réciproque : $f^{-1}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$

Exercice 4

1. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(t)}{1 + \cos(t)} dt$.
2. Préciser sur quel(s) intervalle(s) le calcul d'une telle primitive peut être réalisé :

$$F(x) = \int \frac{dt}{t(t^2 + 2t + 5)}$$

puis calculer $F(x)$. Indication : On pourra montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que $\frac{1}{x(x^2 + 2x + 5)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2 + 2x + 5}$

Problème 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt \quad \text{et} \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

1. Calculer les intégrales I_0 et J_0 .

2. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

3. Soit $n \geq 1$.

(a) Démontrer la relation $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.

(b) En déduire que $K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}$.

(c) Démontrer la relation $\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n$.

4. (a) Démontrer que, pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $x \leq \frac{\pi}{2} \sin(x)$.

(b) En déduire que, pour tout entier n , on a

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)} \quad \text{et} \quad 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

(c) En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on déterminera.

Problème 2

1. Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))$.
 - (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
 - (b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))}{x}$.
2. Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.
 - (a) Préciser l'ensemble de définition de g . Justifier la dérivabilité de g sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$. Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à $]0, +\infty[$ puis pour x appartenant à $] -\infty, 0[$.
 - (b) En déduire une relation entre $f(x)$ et $g(x)$ pour x appartenant à $]0, +\infty[$ puis pour x appartenant à $] -\infty, 0[$.
 - (c) Calculer la limite à droite, puis à gauche, quand x tend vers 0, de $\frac{g(x) - g(0)}{x}$. g est-elle dérivable en 0 ?
 - (d) Donner l'allure de la courbe représentative de g dans un repère orthonormal. Préciser les demi-tangentes au point d'abscisse 0.
3. Soit (E) l'équation différentielle : $y' - \operatorname{th}(x)y = 1$. Déterminer les fonctions solutions réelles de (E) .
4. On étudie les fonctions $\varphi_\lambda : x \mapsto \operatorname{ch}(x)(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) + \lambda)$, λ désignant une constante réelle.
 - (a) On note $h_\lambda(x) = \frac{\varphi'_\lambda(x)}{\operatorname{sh}(x)}$. Étudier le sens de variation de h_λ et dresser son tableau de variation avec les limites.
 - (b) Dans cette question, on suppose $\lambda > \frac{\pi}{2}$. Justifier que h_λ s'annule pour un réel a_λ unique. En déduire le signe de $h_\lambda(x)$ puis celui de $\varphi'_\lambda(x)$ et le tableau de variation de φ_λ , avec les limites. On note m_λ le minimum de φ_λ ; justifier que $m_\lambda = \frac{-1}{\operatorname{th}(a_\lambda)}$ et en déduire son signe.
 - (c) Dans cette question, on suppose $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Étudier le signe de $h_\lambda(x)$ puis celui de $\varphi'_\lambda(x)$ et le tableau de variation de φ_λ , avec les limites.
 - (d) Dans cette question, on suppose $0 \leq \lambda < \frac{\pi}{2}$. Étudier le signe de $h_\lambda(x)$ puis celui de $\varphi'_\lambda(x)$ et le tableau de variation de φ_λ , avec les limites.