

**DM n°2.**

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant.

**Exercice 1**

Prouver que  $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{F}(E, \{0;1\}) \\ A \mapsto \mathbb{1}_A \end{cases}$  est une bijection et donner sa réciproque : on procédera par analyse puis synthèse. Dans l'analyse, on supposera que  $\Psi$  est la réciproque de  $\Phi$ , et on déterminera pour une fonction  $f \in \mathcal{F}(E, \{0;1\})$  ce que peut valoir  $\Psi(f)$

**Exercice 2**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $f(x) = e^{\text{sh}(x)} - x - 1$  et pour tout  $n \geq 2$ ,

$$S_n = \sum_{k=n}^{np} \text{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$$

1. Montrer que l'équation  $2 \text{sh}(x) + 1 = 0$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ . Notons  $a$  cette solution.

2. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $\text{ch}^2(x) + \text{sh}(x) \geq 0$ .

3. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

4. Démontrer que

$$\forall x \in ]0, 1[, 1 + x \leq e^{\text{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$$

5. En déduire que

$$\forall n \geq 2, \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$

6. Déterminer alors la limite de  $(S_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 3**

On appelle fonction sécante hyperbolique la fonction définie par

$$\operatorname{sch}(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de la fonction  $\operatorname{sch}$  et étudier sa parité.
2. Étudier les variations de la fonction  $\operatorname{sch}$  et préciser ses limites aux bornes de  $D$ .
3. Montrer que la restriction de  $\operatorname{sch}$  à  $[0, +\infty[$  admet une application réciproque.  
On appelle argument sécante hyperbolique cette application réciproque et on la notera dorénavant  $\operatorname{Argsch}$ .
4. Donner l'ensemble de définition de  $\operatorname{Argsch}$ , son ensemble de continuité ainsi que ses variations.
5. Déterminer une expression explicite de la fonction  $\operatorname{Argsch}$ .