

Correction du DM n°2.

Exercice 1 : Corrigé en coursExercice 2

1. $2\operatorname{sh}(x) + 1 = 0 \iff \operatorname{sh}(x) = -\frac{1}{2} (*)$.

sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\operatorname{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc l'équation (*) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}(x) = 1 + \operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sh}(x) = 1 + X + X^2$ en posant $X = \operatorname{sh}(x)$.

$\Delta < 0$ donc $1 + X + X^2 \geq 0$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}(x) \geq 0$.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux.

$$f'(x) = \operatorname{ch}(x)e^{\operatorname{sh}(x)} - 1$$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux.

$$f''(x) = \operatorname{sh}(x)e^{\operatorname{sh}(x)} + \operatorname{ch}^2(x)e^{\operatorname{sh}(x)} = (\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}^2(x))e^{\operatorname{sh}(x)} \geq 0 \text{ d'après la question précédente.}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
f'	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^{\operatorname{sh}(x)} \geq x + 1$.

d'où pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{\operatorname{sh}(-x)} \geq 1 - x$ d'où $e^{-\operatorname{sh}(x)} \geq 1 - x$.

$\forall x \in]0, 1[, 1 - x \in]0, 1[$ donc $e^{\operatorname{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$.

Conclusion : $\forall x \in]0, 1[, 1 + x \leq e^{\operatorname{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$

5. $\forall k \in \llbracket n, np \rrbracket, \frac{1}{np} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}$ donc $0 < \frac{1}{k} < 1$

On en déduit d'après la question précédente, $1 + \frac{1}{k} \leq e^{\operatorname{sh} \frac{1}{k}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \Rightarrow \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$

d'où en sommant les encadrements membre à membre on obtient

$$\sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq S_n \leq \sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \quad \text{soit} \quad \sum_{k=n}^{np} \ln(k+1) - \ln k \leq S_n \leq \sum_{k=n}^{np} \ln k - \ln(k-1)$$

On a deux sommes télescopiques :

$$\ln(np+1) - \ln n \leq S_n \leq \ln(np) - \ln(n-1) \text{ soit } \forall n \geq 2, \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$

$$6. \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(p + \frac{1}{n}\right) = \ln(p)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{np}\right) = \ln(p)$$

D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(p)$

Exercice 3

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \geq 1$ donc sch est définie sur $\mathbb{R}$. ch étant paire, on en déduit que sch est paire.

2. sch est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux car $\operatorname{ch} \neq 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sch}'(x) = -\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} \quad \text{du signe de } -\operatorname{sh}(x) \text{ qui est du signe de } -x.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
sch	0	1	0

3. sch est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ donc sch est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $\operatorname{sch}([0, +\infty[) =]0, 1]$; donc sch admet une application réciproque de $]0, 1]$ dans $[0, +\infty[$.

4. D'après le théorème de la bijection, Argsch est définie et continue sur $]0, 1]$.
 sch est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ donc Argsch est strictement décroissante sur $]0, 1]$.

5. On l'équivalence suivante $\begin{cases} y = \operatorname{sch}(x) \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \operatorname{Argsch}(y) \\ 0 < y \leq 1 \end{cases}$

$$\forall y \in]0, 1], y = \operatorname{sch}(x) \iff y = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \iff \frac{1}{y} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \iff \begin{cases} X = e^x \geq 1 \\ X + \frac{1}{X} = \frac{2}{y} \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \iff X^2 - \frac{2}{y}X + 1 = 0$$

$$\iff \Delta = \frac{4}{y^2} - 4 = \left(\frac{2\sqrt{1-y^2}}{y}\right)^2, \quad X = \frac{y - \sqrt{1-y^2}}{y} = X_1 \quad \text{ou} \quad X = \frac{y + \sqrt{1-y^2}}{y} = X_2$$

$X_1 X_2 = 1$ donc une seule solution est supérieure à 1 et $X_1 \leq X_2$ donc $X_1 < 1 < X_2$

$$\text{D'où } y = \operatorname{sch}(x) \iff e^x = \frac{y + \sqrt{1-y^2}}{y} \iff x = \ln\left(\frac{y + \sqrt{1-y^2}}{y}\right).$$

Conclusion : $\forall y \in]0, 1], \operatorname{Argsch}(y) = \ln\left(\frac{y + \sqrt{1-y^2}}{y}\right)$