Colle 7 : Fonctions & Fonctions trigonométriques réciproques.

Preuves à connaître

Proposition 1 Inclusion et indicatrice

Soit $(A,B) \in \mathscr{P}^2(E)$.

$$A \subset B \Longleftrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$$

Définition 1 Injection et surjection

Soit $f : E \to F$.
f est injective $\Leftrightarrow \left(\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\right) \quad \Leftrightarrow (\forall y \in F$, y admet au plus un antécédent par f
f est surjective $\Leftrightarrow$ $(\forall y \in F, \exists x \in E / f(x) = y)$ $\Leftrightarrow$ $(\forall y \in F, y$ admet au moins un antécédent par $f)$ $\Leftrightarrow$ $Im(f) = F$
Donner un exemple de fonction injective, de fonction non-injective, de fonction surjective, de fonction non-surjective.

Proposition 2 Compositions et injections

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$, alors

- Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective

Proposition 3 Propriétés des fonctions indicatrices

- $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$
- $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Proposition 4 Composition et surjections

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Alors

- Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Définition 2 Caractérisation de l'application réciproque

f est bijective de E dans F si et seulement s'il existe $g \in \mathscr{F}(F,E)$ qui vérifie

$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{Id}_E$$

g est unique, on l'appelle **l'application réciproque** de f et on la note f^{-1}.

Proposition 5 Théorème de la bijection [on ne démontrera que les 2e et 4e points]

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** et **strictement monotone** sur I alors

- $\operatorname{Im}(f) = f(I) = J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Pour tout $m \in J$, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans I. Autrement dit, f est une bijection de I dans J.
- f admet une application réciproque qui est continue sur J.
- $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).

Proposition 6 Théorème : Dérivation d'une fonction réciproque [2e point admis, on justifiera le premier point]

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I dont **la dérivée ne s'annule pas sur** I alors

- f est bijective de I dans l'intervalle $J = f(I)$.
- f^{-1} est dérivable sur J et pour tout $x \in J$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Proposition 7 Fonction arccosinus

Donner la définition, valeurs remarquables ($0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$ et leurs opposés) et dérivée (à savoir retrouver à partir du théorème de dérivation d'une fonction réciproque du lemme). Donner le tableau de variation et le graphe (à représenter avec le graphe de la fonction cosinus)

Proposition 8 Fonction arcsinus

Donner la définition, valeurs remarquables ($0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$ et leurs opposés) et dérivée (à savoir retrouver à partir du théorème de dérivation d'une fonction réciproque et du lemme). Donner le tableau de variation et le graphe (à représenter avec le graphe de la fonction sinus)

Proposition 9 Composées

- $\sin \circ \operatorname{Arcsin} = \cos \circ \operatorname{Arccos} = id_{[-1;1]}$
- $\operatorname{Arccos} \circ \cos$ est définie sur $\mathbb{R}$, mais seulement sa restriction à $[0, \pi]$ vaut l'identité, elle est par ailleurs paire (ce qui permet d'obtenir son graphe sur $[-\pi; 0]$ et 2π-périodique (ce qui permet de l'obtenir sur $\mathbb{R}$)) donner le graphe de $\operatorname{Arccos} \circ \cos$
- $\operatorname{Arcsin} \circ \sin$ est définie sur $\mathbb{R}$, mais seulement sa restriction à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ vaut l'identité, et $\forall \theta \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ on a $\operatorname{Arcsin} \circ \sin(\theta) = \pi - \theta$. Par 2π-périodicité, on peut ensuite donner le graphe de $\operatorname{Arcsin} \circ \sin$

Proposition 10 Lemme

$\forall x \in [-1, 1]$,

$$\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - x^2} \text{ et } \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

À savoir faire

- ☐ Exercices avec les fonctions trigonométriques
- ☐ Déterminer si une fonction donnée est injective, surjective ou bijective. Déterminer la réciproque lorsqu'elle est bijective.
- ☐ Déterminer des limites en utilisant le théorème de croissances comparées, ou en reconnaissant des limites de taux d'accroissements (sinus et sinus hyperbolique en 0, ln en 1 etc.)
- ☐ Déterminer des limites en utilisant le théorème de croissances comparées, ou en reconnaissant des limites de taux d'accroissements (sinus et sinus hyperbolique en 0, ln en 1 etc.)
- ☐ Savoir trouver une asymptote oblique ou verticale à la courbe représentative d'une fonction.
- ☐ Montrer qu'une fonction est paire, impaire, périodique, exploiter ces informations pour retreindre l'étude et le graphe de la fonction.
- ☐ Savoir dériver un produit, une composée de fonctions de références, établir un tableau de variations.
- ☐ Déterminer un ensemble de définition, un ensemble de dérivabilité.
- ☐ Savoir manipuler des inégalités

Le programme officiel

Contenus	Capacités & commentaires
c) Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle. Inégalités $\exp(x) \geqslant 1+x$, $\ln(1+x) \leqslant x$.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan. Fonctions hyperboliques sh, ch, th.	Dérivée, variations, représentation graphique. .Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.
c) Applications et relations (de "Raisonnement et vocabulaire ensembliste")	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathcal{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition. Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.
Relation binaire sur un ensemble.	
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	La notion d'ensemble quotient est hors programme. Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent. Congruences dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Z}$. Notation $a \equiv b\ [c]$.
~~Relation d'ordre. Ordre partiel, total.~~	