

TD 4 : Nombres complexes. Trigonométrie

Manipulations des formes algébrique et trigonométrique

Ex 1 Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

(a) $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ (b) $(1-i)^3$ (c) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^2}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$

Ex 2 Montrer que pour tout complexe z tel que $|z| \neq 1$, on a $\left| \frac{1-z^n}{1-z} \right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$. Reconnaître une somme de termes de suite géométrique. Utiliser l'inégalité triangulaire

Ex 3 Mettre les nombres complexes suivant sous forme trigonométrique :

1. $z_1 = 1+i, z_2 = \sqrt{3}+i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$, puis en déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}, \sin \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.
2. $\frac{(1+i)^5(1-i\sqrt{3})^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$, puis en déduire sa forme algébrique.
3. $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$

Ex 4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes

$$S_1(\theta) = \sum_{k=1}^n \sin(k\theta), \quad S_2(\theta) = \sum_{k=1}^n \cos^k(\theta) \sin(k\theta) \quad \text{et} \quad S_3(\theta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$$

1) $\sin(k\theta) = \text{Im}(e^{ik\theta})$ 2) $\cos^k(\theta) \sin(k\theta) = \text{Im}((\cos(\theta)e^{i\theta})^k)$ 3) Utiliser la formule du binôme de Newton

Ex 5 Soient a et b deux complexes non nuls. Montrer que $\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}$. Mettre au même dénominateur, et utiliser $\frac{a}{|a|^2} = a\bar{a}$ et $\frac{b}{|b|^2} = b\bar{b}$

Trigonométrie

Ex 6 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $\cos^2(2x) - \cos^2(x)$

(c) $\tan(2x) - \tan(x)$

a) Identité remarquable et formule de la somme.

b) Utiliser la relation $\sin(a) = \cos(a - \frac{\pi}{2})$ c) d) Formule vue en cours (partie réelle d'une somme de termes d'une suite géométrique)

Ex 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

$$\sin(3x) - \sin(2x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad \frac{\sin x + \sin(3x) + \sin(5x)}{\cos x + \cos(3x) + \cos(5x)} = 1$$

Ex 8 Soient a, b et c les mesures des angles géométriques d'un triangle non aplati.

Démontrer que si $\sin(3a) + \sin(3b) + \sin(3c) = 0$ alors au moins l'un des trois angles est égal à $\frac{\pi}{3}$.

Ex 9 Exprimer $\cos(4t)$ uniquement en fonction de $\cos t$. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$. Utiliser la formule $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4 = \cos(4\theta) + i\sin(4\theta)$

Ex 10 Linéariser les expressions suivantes puis en déduire une primitive de fonctions associées :

$$\sin^6 x \quad \text{et} \quad 2\cos^4 x \sin^3 x + \cos^3 x \sin^2 x$$

Formule d'Euler puis binôme de Newton

Ex 11 Calcul de la somme $\sum_{3k=0}^n \binom{n}{3k}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Mettre $(1+j)^n$ et $(1+j^2)^n$ sous forme trigonométrique.
2. Développer $(1+j)^n$ et $(1+j^2)^n$ à l'aide de la formule du binôme et regrouper astucieusement les termes pour calculer les sommes

$$S_0 = \sum_{3k=0}^n \binom{n}{3k}, \quad S_1 = \sum_{3k+1=0}^n \binom{n}{3k+1}, \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{3k+2=0}^n \binom{n}{3k+2}$$

3. Proposer une méthode pour calculer la somme $\sum_{4k=0}^n \binom{n}{4k}$.

Résolutions d'équations algébriques

Ex 12 On considère le nombre complexe $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$.

1. On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.
Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive. Faire un dessin représentant l'ensemble $\mathbb{U}_7$, S correspond à la somme de 3 éléments sur les 7 de cet ensemble, T à la somme de leurs 3 conjugués.
2. Calculer $S+T$ et ST puis en déduire S et T .
Développer ; en utilisant le fait que $z^7 = 1$, et $1 + z + z^2 + \dots + z^6 = 0$, on trouve $ST = 2$.

Ex 13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^3 - (5-3i)z^2 + (6-11i)z + 2 + 16i = 0$

sachant qu'il y a une racine imaginaire pure
Chercher une solution sous la forme ix avec $x \in \mathbb{R}$:
identifier parties réelles et parties

(b) $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$

Mettre sous forme $z^2(z+a)^2 = -100$ puis conclure

(c) $z^8 = -5$

Raisonnement sous forme trigonométrique

(d) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

Poser $Z = z^3$, ne pas oublier qu'un complexe a généralement 3 racines cubiques

(e) $\bar{z} = z^5$

Forme trigonométrique

(f) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2 \cos \theta$

avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Poser $\omega := \frac{z+1}{z-1}$ et résoudre $\omega^2 - 2 \cos(\theta)\omega + 1 = 0$ puis conclure

(g) $(2+iz)^5 = (2-iz)^5$

de deux façons différentes. Comparer les résultats

1) Voir que $\frac{2+iz}{2-iz}$ est une racine 5-ème de l'unité.

2) Binôme de Newton, puis $zP(z^2) = 0$

Ex 14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$e^z = -1 \quad \text{et} \quad e^z + e^{-z} + 1 = 0$$

Pour la deuxième : poser $\omega = e^z$ puis se ramener et $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ et conclure.

Géométrie et nombres complexes

Ex 15 Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b et c .

Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Le triangle est équilatéral si et seulement si $AB = BC$ et $(\vec{AB}, \vec{BC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ ce qui revient à connaître parfaitement $\frac{c-b}{b-a}$

Ex 16 Soient A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c et d . Interpréter géométriquement les propriétés suivantes :

(a) $a + b + c + d = 0$ (b) $a - b + c - d = 0$ (c) $|a + 1| = 2$

(d) $|a + 1| = |a - 2|$ (e) $\frac{b-a}{c-a} = i$ (f) $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}^*$ (g) $\frac{b-a}{c-a} \in i\mathbb{R}^*$

a) Barycentre, b) Milieu de milieu

c) Cercle d)

Médiatrice e) Angle droit f) Angle plat g) Angle droit, avec orientation

Ex 17 Caractériser géométriquement l'ensemble des points M du plan d'affixe z qui vérifient :

(a) $|(1+i)z - 2i| < 1$ (b) $\left| \frac{iz + 4 + 2i}{z - 1 + i} \right| = 1$ (c) $|z - 2i| = |1 + i + \bar{z}|$

(d) $\frac{z-1}{z+i} \in i\mathbb{R}$ (e) $z = 1 + ai, a \in \mathbb{R}$ (f) $|z| = |1 - z| = \left| \frac{1}{z} \right|$

a) cercle b) médiatrice

(g) Les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle en N d'affixe z^2 (h) Les points d'affixes $z, z-1$ et z^2 sont alignés (i) Les points d'affixes $1, z$ et z^2 sont alignés

c) Médiatrice d) Cercle privé d'un point e) droite

f) Intersection d'une médiatrice t d'un cercle g, h et i) Exprimer un angle entre deux vecteurs

Similitudes directes planes

Ex 18 Déterminer l'expression analytique de la similitude directe qui transforme les points $A(1, 1)$ et $C(2, -1)$ respectivement en $B(3, -2)$ et en O . On précisera son centre, son rapport et son angle. [Se ramener à un système à deux équations et deux inconnues \$a, b\$ complexes.](#)

Ex 19 Donner l'expression complexe des transformations suivantes : [Cours](#)

1. La rotation r de centre $\Omega(1 - i)$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
2. La similitude directe s de centre $A(2i)$, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Ex 20 Soit $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a^2 z + a^2 - a \end{array}$

1. Déterminer a pour que T soit une translation. Donner alors ses éléments caractéristiques. [Il y a deux solutions](#)
2. Déterminer a pour que T soit une rotation. T peut-elle être une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$? [Pour quelles valeurs a-t-on \$a^2 \in \mathbb{U}\$?](#) Si oui, préciser son centre.
3. Déterminer a pour que T soit une homothétie. T peut-elle être une homothétie de rapport -3 ? Si oui, préciser son centre. [Pour quelles valeurs a-t-on \$a^2 \in \mathbb{R}^*\$?](#)
4. Déterminer la nature de T pour $a = 1 + i$. [Cours](#)

Ex 21 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & (1 - i)z + 2i \end{array}$

1. Caractériser géométriquement l'application f . [Déterminer : centre, rapport, angle.](#)
2. Déterminer l'image par f de la droite d'équation : $x + 2y - 1 = 0$.
3. Déterminer l'image par f du cercle de centre $B = (0, 1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.