

DS n°1.**durée : 3 heures**

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant.

Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroté vos copies avant de les rendre.

La calculatrice est interdite.

Question de cours

Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 1

Pour chacune des assertions suivantes :

- donner sa négation.
- énoncer la contraposée puis la réciproque dans les cas 1,3 et 4.

1. $P: \quad \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a \neq b \text{ et } b \neq c \Rightarrow a \neq c).$
2. $Q: \quad \ln \pi \text{ est rationnel ou } \sqrt{2} \text{ est irrationnel.}$
3. $R: \quad \text{Si } 2 = -2 \text{ alors } (-2)^2 = 4.$
4. $S: \quad \text{si } \forall x \in \mathbb{R}, (x < a \Rightarrow x \leq b) \text{ alors } a \leq b.$

Exercice 2

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

1. On considère l'équation en X une partie de E :

$$(E_1) \quad A \cup X = B$$

On va résoudre cette équation par analyse-synthèse (Résoudre = déterminer l'ensemble des parties X qui satisfont l'équation).

- (a) Supposons l'équation vérifiée, donner une condition nécessaire sur A et B pour que l'équation admette des solutions.
- (b) Montrer que $B \setminus A \subset X$. Y a-t-il égalité ?
- (c) Réciproquement montrer que toute partie X de la forme $(B \setminus A) \cup Y$ où Y est une partie quelconque de A est solution de (E_1) . Conclure sur la résolution de (E_1) .

2. Résoudre de même l'équation en X une partie de E :

$$(E_2) \quad A \cap X = B$$

Exercice 3

On appelle la **suite de Fibonacci** la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 1, F_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathbb{N}$ et $F_n \geq n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = F_{2n} - 1$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1$

Exercice 4

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Discuter en fonction du paramètre réel m l'intersection entre la droite $(\mathcal{D})$ et le plan $(\mathcal{P})$ d'équations :

$$(\mathcal{D}) \begin{cases} x + my + 2z = 1 \\ x + 2my + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}) \quad mx + y + 2z = m$$

Vous résoudrez le système à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss et vous préciserez dans chaque cas la nature géométrique de l'intersection trouvée.

Exercice 5

Pour tout $n \geq 2$, on définit $P_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$.

1. Soit $k \geq 2$. Factoriser $k^3 - 1$ et $k^3 + 1$.
2. Vérifier que $k^2 + k + 1 = (k+1)^2 - (k+1) + 1$.
3. En déduire une expression de P_n à l'aide de factorielles, puis simplifier l'expression de P_n .
4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la somme double $S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j$.

1. Vérifier que $S_n = n2^{n+1} + 1$.

2. Montrer que $S_n = \sum_{j=0}^n (j+1)2^j$.

3. En déduire que

$$\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

4. Déterminer alors la valeur de la somme double $T_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1}$.

Exercice 7

Soient k, n et p des entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$.

1. Montrer que $\binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} = \binom{n}{k} \binom{k}{p}$.

2. En déduire les valeurs des sommes

$$S_1 = \sum_{p=0}^k \binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=p}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{p}$$