TD 20 : Analyse asymptotique

Calculs de développements limités

Ex 1 Calculer le développement limité de tan en 0 à l'ordre 5 par la méthode directe, puis par intégration et par dérivation.Méthode irecte : en faisant le DL de $\sin/\cos$ à l'ordre 5. Intégration et dérivation : vue en cours, utiliser $\tan' = 1 + \tan^2$

Ex 2 Déterminer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre n et au voisinage de a :

(a) $f_1(x) = \ln(2e^{-x} + e^x) \quad n = 4 \quad a = 0$

(b) $f_2(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad n = 3 \quad a = 0$

(c) $f_3(x) = \operatorname{Arccos} x \quad n = 5 \quad a = 0$

(d) $f_4(x) = \cos x \quad n = 5 \quad a = \dfrac{\pi}{3}$

(a) On aura besoin du DL de ln en 3.

(e) $f_5(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\operatorname{Arcsin}^2 x} \quad n = 3 \quad a = 0$

On pourra écrire que $\ln(3+u) = \ln(3(1+\frac{u}{3})) = \ln(3) + \ln(1+\frac{u}{3})$ ce qui nous ramène à un DL de ln en 1.
(b) Utiliser $(1+x)^{1/x} = \exp(\frac{1}{x}\ln(1+x))$
(c) $\operatorname{Arccos}'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ dont on peut donner un DL à l'ordre 4, puis le primitiver.
(d)$\cos(\frac{\pi}{3}+h) = \cos(\frac{\pi}{3})\cos(h) - \sin(\frac{\pi}{3})\sin(h)$
(e)

Ex 3 Soit $f : \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\tan(x) - x \end{array}$. Montrer que f admet une fonction réciproque impaire de classe $\mathscr{C}^\infty$, puis déterminer le développement limité de f^{-1} à l'ordre 6.
Après avoir justifié que f est bijective, on utilise l'égalité $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ pour montrer que si $f^{-1} \in C^n$ alors $f^{-1} \in C^{n+1}$

Ex 4 Donner un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la solution φ de l'équation différentielle :

$$2(x-1)y' + y = \sin(2x) + x^2 \quad \text{telle que} \quad y(0) = 1$$

(On montrera qu'une telle solution existe et qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0).
Comme $y' = \frac{\sin(2x)+x^2-y}{2(x-1)}$ si $y \in C^n(]-1,1[)$ alors $y \in C^{n+1}(]-1,1[)$ Ensuite: si $f \in C^{+\infty}$ alors elle admet un DL à tout ordre en 0. Comme f est impaire, f^{-1} également et donc $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_0(x^6)$ et on identifie les DL de $f(f^{-1}(x))$ et celui de x en 0.

Calculs de limites et d'équivalents

Ex 5 Déterminer des équivalents simples au point a pour les fonctions suivantes :

(a) $g_1(x) = \ln(\sin x) \quad a = 0$

(b) $g_2(x) = -\operatorname{cotan}(x)\sin^2(nx) \quad a = 0$ avec $n > 0$.

(c) $g_3(x) = \dfrac{2\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan}(2x)}{x^{\frac{3}{2}}} \quad a = 0$

(d) $g_4(t) = \dfrac{\sin t}{t^\alpha} \quad a = 0.$

(e) $g_5(x) = \dfrac{\ln x}{(x+1)^3} \quad a = 0$ et $a = +\infty$

(f) $g_6(x) = \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)} - \dfrac{x}{3}$

Ex 6 Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\tan x - \tan(2x)}{x(1-\cos(3x))}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{Arctan} x - \dfrac{\pi x+1}{2x+1}\right)$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh} x}\right)^x$

(d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{1}{\cos(3x)}\left(\operatorname{Arctan}(2\sin x) - \dfrac{\pi}{4}\right)$

(e) $\lim_{x\to+\infty} \left(\cos\left(\dfrac{\pi x}{3x+1}\right) + \sin\left(\dfrac{\pi x}{6x+1}\right)\right)^x$

(f) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^{\sqrt[3]{x^3+1}}$

a) Faire des DL à l'ordre 3 du numérateur ainsi que du dénominateur : cela permettra d'en trouver des équivalents en 0

b) Attention, on étudie Arctan mais non pas au voisinage de 0, mais de celui de $+\infty$. On utilisera alors la relation $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, et on pourra alors utiliser un DL en la variable $\frac{1}{x}$ qui elle, tend bien vers 0.

c) Exprimer sous la forme $\exp(x\left(\ln(\frac{ch(x)}{1+\operatorname{sh}(x)})\right))$

Applications à l'étude de fonctions

Ex 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0)=1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 1+x+x^2+x^3\sin\dfrac{1}{x}$.
Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 mais que $f''(0)$ n'existe pas.

Ex 8

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0)=0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.
   Déterminer son développement limité en 0 à l'ordre n.
   Attention : ce n'est pas un DL de l'exponentielle en 0 car $-\frac{1}{x^2} \to -\infty$ On montrera plutôt que pour tout n, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et on concluera
2. Deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui ont le même développement limité à tout ordre en 0 sont-elles égales?

Ex 9 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x\sin(\pi x)}{\ln(x)}$ pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1 et préciser $f(1)$. Montrer que f ainsi prolongée est deux fois dérivable en 1.
2. Mêmes questions en 0.

Ex 10

1. A l'aide des développements asymptotiques en $+\infty$ et $-\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$, déterminer des courbes asymptotes à $\mathcal{C}_f$ et leurs positions par rapport à $\mathcal{C}_f$.
   $f(x) = |x|\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}$
2. Mêmes questions avec $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.

Ex 11 Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f. En dehors du point $x=0$, les arguments usuels fonctionnent. En 0 : cela revient à montrer que f admet un DL à l'ordre 1
2. Déterminer les asymptotes à $\mathscr{C}_f$ en l'infini. Étudier leurs positions relatives. Poser $h=\frac{1}{x}$, alors $1+e^h$ admet un DL lorsque x tend vers l'infini (car h tend vers 0)
3. Étudier les variations de f puis tracer.

Étude asymptotique de suites

Ex 12 Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 des suites :
(a) $u_n = \operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{n+1}{n+3}}$ (b) $u_n = \ln\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)$ (c) $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}\sin(n)}\right)$
a) Attention, le DL connu de la fonction arctangente est celui en 0, ici, il faudra celui en 1. On peut utiliser le fait que $\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ puis le primitiver
b) Poser $h=\frac{1}{n}$, utiliser un DL en 0 de tangente c) Poser $h = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}\sin(n)}$, qui est lui même de la forme $\frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1-u}$

Ex 13

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$ que l'on notera u_n. Appliquer le TVI

2. Étudier la convergence de (u_n) et montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. On applique le TVI à l fonction f_n sur $[\ln(n)-1, \ln(n)+1]$ pour montrer qu'à partir d'un certain rang $\ln(n) - 1 \leq u_n \leq \ln(n) + 1$.

3. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} a\ln(n) + b\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

On écrit $u_n = \ln(n) + v_n$ où l'on sait que $v_n = O_{+\infty}(1)$.