TD 19 : Polynômes et fractions rationnelles

Division euclidienne

Ex 1 Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :
(a) $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ et $B = X^2 - 3X + 1$
(b) $A = X^3 - iX^2 - X$ et $B = X - 1 + i$
(c) $A = 2X^5 - 5X^3 - 8X$ et $B = X + 3$

Ex 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les restes de la division euclidienne de A par B :
$A = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2$ et $B = (X-1)(X-2)$ puis $B = (X-1)^2$
Comme le diviseur est de degré 2, le reste est de degré au plus 1, donc s'écrit sous la forme $aX + b$. Ainsi $A = QB + aX + b$: en évaluant en les racines de B on trouve des conditions sur a et b.
Pour le deuxième cas : B n'admet qu'une racine, on pourra faire le même raisonnement en dérivant...

Ex 3 Le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $(X-2)$ est 3 et par $(X+2)$ est 2. Quel est le reste de la division euclidienne de P par (X^2-4) ?
Connaître le reste dans la division euclidienne par $X^2 - 4$ revient à connaître les valeurs $P(2)$ et $P(-2)$ car $P = (X^2-4)Q + aX + b$ et on évalue en 2 et -2. Ces valeurs peuvent par ailleurs être déterminées

Ex 4 Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ qui vérifie $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_3 = 0_3$.

1. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.Écrire $A^3 - 4A^2 + 5A = 2I_3$ et remarquer que le membre de gauche de l'égalité est de la forme AB avec une certaine matrice B (qui commute avec A)
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 4X^2 + 5X - 2$. Commencer par factoriser $X^3 - 4X^2 + 5X - 2$ en remarquant que 1 est racine évidente.
   On écrit ensuite $X^n = (X^3 - 4X^2 + 5X - 2)Q + aX^2 + bX + c$ on peut évaluer en les 2 racines et obtenir deux égalités : ce n'est pas suffisant. On dérive alors l'égalité : $nX^{n-1} = \ldots.$ et on évalue en la racine double
3. En déduire A^n en fonction de A^2, A, I_3 et n.
   En reprenant l'égalité $X^n = (X^3 - 4X^2 + 5X - 2)Q + a_nX^2 + b_n + c_n$, on trouve $A^n = a_nA^2 + b_nA + c_nI_3$.

Ex 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer a et b pour que $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$.
Ceci revient à ce que 1 soit une racine double (ou plus) de P, i.e. $P(1) = P'(1) = 0$

Ex 6 A quelle condition le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$? Proposer deux méthodes.
On peut par exemple en faire la division euclidienne par $X^2 + X + 1$ dont le reste sera de la forme $\alpha X + \beta$, puis évaluer cela en deux valeurs particulières.
Sinon, on peut interpréter cette divisibilité en terme de racines.

Arithmétique sur les polynômes

Ex 7 Calculer $A \wedge B$ et $A \vee B$ pour :

1. $A = X^4 - X^3 - 4X^2 - X + 1$ et $B = X^3 - X^2 - 5X + 2$ Appliquer l'algorithme d'Euclide
2. $A = (X-1)^3(X+2)^2$ et $B = 2(X-1)^2(X-3)$ Ne pas appliquer l'algorithme d'Euclide !

Ex 8 Soient A et B les polynômes $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^5 + 1$

1. Montrer que A et B sont premiers entre eux.
2. Déterminer l'ensemble des couples de polynômes (U, V) qui vérifient $AU + BV = 1$.Utiliser la méthode de l'algorithme d'Euclide permettant de trouver un tel couple

Polynômes et racines

Ex 9 Montrer que le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples. Combien P_n a-t-il exactement de racines réelles ?

On remarque que $P_n' = P_{n-1}$ donc une racine commune à P_n et à P_n' vérifierait $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$ or seul 0 peut vérifier cela, mais 0 n'est pas une racine de P_n.

Ex 10 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$ alors $P(X^n)$ est divisible par $X^n - 1$.

Ex 11 Factoriser le polynôme $P = 4X^3 + 32X^2 - 35X + 9$ sachant qu'il possède une racine multiple.
Avec multiplicité, les racines sont α, α et β (avec éventuellement $\beta = \alpha$. On connaît la somme et le produit de ces racines.)

Ex 12 Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :
$P_1 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$ $\quad P_2 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ $\quad P_3 = X^8 + 1$
$P_4 = X^8 + X^4 + 1$ $\quad P_5 = X^n - 1$

Ex 13 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer l'ensemble des polynômes P tel que $P' \mid P$.
Soit P un tel polynôme $\deg(P) \geq 1$, on a $\deg(P) = 1 + \deg(P')$ donc $P = \lambda(X-a)P'$. On utilise ensuite la formule de Taylor.

Relations coefficients/racines

Ex 14 Soit $P = X^3 + 2X - \pi$. On note a, b et c ses racines dans $\mathbb{C}$. Calculer $S_n = a^n + b^n + c^n$ pour $n \in \{-2, -1, 1, 2, 3\}$.

Ex 15 Soient a, b et c les racines du polynôme $X^3 + pX + q$. Trouver le polynôme unitaire dont les seules racines sont a^2, b^2 et c^2.
Il suffit de connaître $a^2 + b^2 + c^2$, $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2b^2$ et $a^2b^2c^2$: ces quantités peuvent se trouver en utilisant $a+b+c$, $ab+ac+bc$ et abc qui sont connues.

Ex 16 Résoudre les systèmes :
(a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+zx=-2 \\ xyz=-4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=18 \end{cases}$ Pourle b) utiliser $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$ et $(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+?$ (pour trouver le "?", on développe, et oncherche à exprimer cela en fonctoin de σ_1, σ_2 et σ_3)

Calculs de décomposition en éléments simples

Ex 17 Déterminer a, b et c tels que : $\dfrac{X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 2}{X^3(X^4-1)^2}$ ait pour seuls pôles réels 0 comme pôle triple et -1 comme pôle simple.
Le dénominateur étant $X^3(X-1)^2(X+1)^2(X-i)(X+1)(X+i)$ cela revient à ce que les racines de $X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 2$ ait pour racines 1, i, $-i$

Ex 18 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

(a) $F_1 = \dfrac{X+i}{X^2+iX+1}$ (b) $F_2 = \dfrac{4X^7}{X^4-1}$ (c) $F_3 = \dfrac{1}{1-2\cos\theta X + X^2}$

(d) $F_4 = \dfrac{X^4+X^2+1}{X^3-1}$ (e) $F_5 = \dfrac{X^2}{X^n-1}$ (f) $F_6 = \dfrac{X^{2n}}{X^{2n+1}-1}$

(g) $F_7 = \dfrac{X^3}{(X^4+X^2+1)^2}$ (h) $F_8 = \dfrac{X^4-X^3+X-1}{(X-1)^4}$

Ex 19 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour qu'ils existent $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\frac{X^2+pX+q}{(X^2-1)^2} = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{(X-1)^2}$$

Lorqu'on multiplie par X^2, la limite en $\pm\infty$ vaut 1 donc $a+b=1$. On réduit ensuite au même dénominateur pour trouver des conditions

Ex 20 Soit P un polynôme réel unitaire de degré $n \geqslant 2$ admettant n racines distinctes non nulles $a_1, a_2 \dots a_n$.
Déterminer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(a_k)}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k P'(a_k)}$

Applications de la décomposition en éléments simples

Ex 21

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F = \dfrac{n!}{X(X+1)\dots(X+n)}$ avec $n \in \mathbb{N}$.Cette fraction n'a que des pôles simples. $F = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{X+k}$ On peut procéder par multiplication et évaluation : on multiplie par $(X+k)$ et on évalue en $-k$ pour trouver b_k
2. En déduire la valeur de la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$ Calculer $F(-1)$

Ex 22 Calculer les deux sommes suivantes : (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4k-1}{k(k+2)} 3^{k-1}$ Décomposer en fracitons rationnelles, faire apparaître des sommes télescopiques

Ex 23 Soit (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k^3+3k^2+2k}$. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.
On peut factoriser le dénominateur, bien qu'il soit de degré 3, car il a une racine évidente. On décompose ensuite en élemnets simples

Ex 24 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée n-ième ainsi qu'une courbe asymptote à leur courbe représentative au voisinage de $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^5+1}{x^2-1}$
Faire la division euclidienne, pour trouver la partie entière et la partie polaire ; cette dernière est négligeable en $\pm\infty$

Ex 25 Déterminer une primitive des fonctions suivantes : (a) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x(x^2+1)}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^3-1}$