Colle 23 : analyse asymptotique (fin) et espaces vectoriels (début)

Résultats et preuves à connaître

Définition 1 Espace vectoriel - Application linéaire - Sous-espace affine - Sommes directes

Donner les définitions de :

- $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel
- f est une application linéaire de E vers F
- $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E
- $(F_1,\dots,F_p)$ sont en somme directe.

Proposition 1 Intersections et unions de sous-espaces vectoriels

- Soit I un ensemble non vide.
  Si $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriels de E alors $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E.
- Soient F et G deux sous-$\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E.
  $F\cup G$ est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E si et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$

Proposition 2 Espace engendré par une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $X=(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, alors le sous-espace vectoriel de E engendré par X est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X, c'est-à-dire

$$\operatorname{vect}(X)=\operatorname{vect}(x_i)_{i\in I}=\left\{\sum_{i\in I}\lambda_i\cdot x_i \;\middle|\; (\lambda_i)_{i\in I} \text{ famille presque nulle de scalaires}\right\}$$

Proposition 3 Propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, X et Y des parties de E.
• **Inclusion :** $X\subset Y \Longrightarrow \operatorname{vect}(X)\subset\operatorname{vect}(Y)$
• **Enlever un vecteur :**
Si $x\in X$ est combinaison linéaire des vecteurs de $X\backslash\{x\}$ alors $\operatorname{vect}(X)=\operatorname{vect}(X\backslash\{x\})$
• **Union et somme :** $\operatorname{vect}(X\cup Y)=\operatorname{vect}(X)+\operatorname{vect}(Y)$

Proposition 4 Caractérisation de la somme directe

F et G sont en somme directe ssi $F\cap G=\{0_E\}$

Proposition 5 Sous-espaces affines

- $M\in\mathscr{F}=\Omega+F$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M}\in F$
- Soit $\mathscr{F}$ le sous-espace affine passant par Ω et dirigé par F.
  Alors pour tout point $A\in\mathscr{F}$, on a $\mathscr{F}=A+F$.

Proposition 6 Intersection de sous-espaces affines

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de E.
Alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \varnothing$ ou $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un sous-espace affine de direction $F \cap G$ si F et G sont les directions respectives de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.

Proposition 7 Application linéaire

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(x_1,\ldots,x_n) \in E^n$ et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i . x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . f(x_i)$$

À savoir faire

- ☐ Tous les exercices sur les développements limités
- ☐ Savoir montrer qu'un ensemble donné est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ($\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},E)$,...)

Ce qu'en dit le programme

Espaces vectoriels et applications linéaires

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire;*
- *reconnaître les problèmes linéaires et les traduire à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire;*
- *définir la notion de dimension, qui décrit le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; on insistera sur les méthodes de calcul de dimension et on fera apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentation : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires;*
- *présenter quelques notions de géométrie affine, afin d'interpréter géométriquement certaines situations.*

En petite dimension, l'intuition géométrique permet d'interpréter les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension au cas général ; on en tirera parti par de nombreuses figures.

Le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tout développement théorique sur les espaces de dimension infinie est hors programme.

A - Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Notations $\operatorname{vect}(A)$, $\operatorname{vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\operatorname{vect}(A)$.
c) Familles de vecteurs : Pas pour le moment	
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.
Somme d'un nombre fini de sous-espaces.	
Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.	La somme $F_1+\cdots+F_p$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F_1+\cdots+F_p$ sous la forme $x_1+\cdots+x_p$ avec $x_i\in F_i$ est unique.
Applications linéaires : a) Généralités	
Application linéaire.	