

Colle 21 : polynômes et fractions rationnelles

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Relations coefficients-racines (cas général)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme complexe de degré n ayant pour racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

On pose $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}$. Alors

$$P = a_n(X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n) \quad \text{et} \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Proposition 2 Propriété

$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, L_i(x_j) = \delta_{ij} : L_i$ admet $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ comme racines mais pas x_i .

Proposition 3 Théorème (Polynôme d'interpolation de Lagrange de degré minimal)

On peut utiliser sans démonstration le résultat précédent Si x_1, \dots, x_n sont des éléments distincts de \mathbb{K} et y_1, \dots, y_n des éléments de \mathbb{K} alors il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui vérifie

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i$$

Il s'agit de $P = \sum_{i=1}^n y_i L_i$.

Proposition 4 Théorème (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$) Sans démonstration

Si $F \in \mathbb{C}(X)$, on a $Q = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{m_k}$ où les α_k sont les pôles de F d'ordre m_k . Alors il existe un unique polynôme E et une unique famille de complexes $(b_{kj})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m_k}$ telle que

$$F = E + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \frac{b_{kj}}{(X - \alpha_k)^j}.$$

Proposition 5 Pôle simple

Soit a un pôle simple de F .

La partie polaire relative à a est $\frac{\alpha}{X - a}$ où $\alpha = [(X - a)F](a)$.

Proposition 6

Soit a un pôle simple de $F = \frac{P}{Q}$.

La partie polaire relative à a est $\frac{\alpha}{X - a}$ où $\alpha = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.

Proposition 7 Théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ **Sans démonstration**

Si $F \in \mathbb{R}(X)$, on a $Q = \prod_{k=1}^q (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{k=1}^r (X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{n_k}$ où les α_k sont les pôles réels de F d'ordre m_k et $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$. Alors il existe un unique polynôme E et une unique famille de complexes $(b_{kj})_{1 \leq k \leq r, 1 \leq j \leq n_k}$ telle que

$$F = E + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{kj}}{(X - \alpha_k)^j} + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} \frac{b_{kj}X + c_{kj}}{(X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^j}.$$

Définition 1 Notation o et O (seule question sur le chapitre "Analyse asymptotique")

Donner les définitions de $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ et $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$. Montrer que la deuxième proposition implique la première et donner un exemple où la première est vérifiée mais pas la deuxième.

À savoir faire

- ☐ Tous les exercices sur les polynômes
- ☐ Décomposer une fraction en éléments simples :
- ☐ Commencer par diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD s'ils ne sont pas premiers entre eux. Faire la division euclidienne de P par Q pour identifier parties entières et polaires.
- ☐ Déterminer les pôles et leurs ordres.
- ☐ Donner la forme de la décomposition en éléments simples en laissant des coefficients indéterminés.
- ☐ Réduire le nombre de coefficients en exploitant les propriétés remarquables (parité, effet de la conjugaison, limite de $xF(x)$ en $+\infty$...).
- ☐ Appliquer la méthode de multiplication-évaluation (de préférence si Q est sous forme factorisée) ou la méthode " $P(a)/Q'(a)$ " s'il s'agit d'un pôle simple et que Q n'est pas sous forme factorisée.
- ☐ Dédire d'une décomposition en éléments simple de F sur $\mathbb{C}(X)$ une décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}(X)$.

Ce qu'en dit le programme

Polynômes et fractions rationnelles

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauss.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

La démonstration est hors programme.

Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités.

Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune.

Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

g) Formule d'interpolation de Lagrange

Si x_1, \dots, x_n sont des éléments distincts de \mathbb{K} et y_1, \dots, y_n des éléments de \mathbb{K} , il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i .

Expression de P .

Description des polynômes Q tels que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i .

h) Fractions rationnelles

Corps $\mathbb{K}(X)$.

Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle.

Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.

La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme.

i) Décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R}

Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} .

La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue.

Application au calcul de primitives, de dérivées k -ièmes.

Si λ est un pôle simple, coefficient de $\frac{1}{X - \lambda}$.

Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.