D.S 7

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o_{x\to 0}(x^5)$$ /1

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_{x\to 0}(x^5)$$ /1

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_{x\to 0}(x^5)$$ /1

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\times\frac{-2}{3}}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\times\frac{-2}{3}\times\frac{-5}{3}}{6}x^3 + o_{x\to 0}(x^3)$$

$$= 1 + \frac{x}{3} - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o_{x\to 0}(x^3)$$ /2

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)$$ /1

Exercice : cherchons la partie entière de A :

$$\begin{array}{l|l} 2X^4 - X^3 + 2X + 5 & X^2 - 3X + 2 \\ \hline -(2X^4 - 6X^3 + 4X^2) & 2X^2 + 5X + 11 \\ \quad 5X^3 - 4X^2 + 2X + 5 & \\ -(5X^3 - 15X^2 + 10X) & \\ \quad 11X^2 - 8X + 5 & \\ -(11X^2 - 33X + 22) & \\ \quad 25X - 17 & \end{array}$$

Division euclidienne : /2

Donc $A(X) = \dfrac{(2X^2+5X+11)(X^2-3X+2) + 25X - 17}{X^2 - 3X + 2} = 2X^2 + 5X + 11 + \dfrac{25X-17}{X^2-3X+2}$

Factorisons X^2-3X+2. $\Delta = 9-4\times 2 = 1$

Factorisation: /1

Deux racines : $\frac{3\pm 1}{2}$ i.e. 1 et 2.

Donc $\frac{25X-17}{X^2-3X+2} = \frac{25X-17}{(X-1)(X-2)}$: fraction irréductible car la seule racine du numérateur, $\frac{17}{25} \notin \{1;2\}$.

Donc $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 /$

$$\frac{25X-17}{X^2-3X+2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}.$$

en multipliant par $X-1$:

$$\frac{25X-17}{X-2} = a + b\,\frac{X-1}{X-2}.$$ On évalue en 1 :

Trouver les constantes: (toutes les méthodes sont acceptées). /2

$$\frac{25-17}{-1} = a \quad \text{i.e.} \quad a = -8$$

en multipliant par $X-2$:

$$\frac{25X-17}{X-1} = b + a\,\frac{X-2}{X-1},$$ évaluation en 2 : $\frac{50-17}{1} = b$ i.e. $b = 33$

Conclusion : $A(X) = 2X^2+5X+11 - \frac{8}{X-1} + \frac{33}{X-2}$

$$B(X) = \frac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)}$$

$\deg(B) = 3-3 = 0$;

On n'oublie pas la partie entière (sinon: 0 pt pour l'exercice)

$$(X-1)(X-2)(X-3) = X^3 - (1+2+3)X^2 + (1\times2+1\times3+2\times3)X - 1\times2\times3$$
$$= X^3 - 6X^2 + 11X - 6.$$

$$B(X) = \frac{(X^3-6X^2+11X-6) + 6X^2-11X+6}{(X-1)(X-2)(X-3)} = 1 + \frac{6X^2-11X+6}{(X-1)(X-2)(X-3)}$$

(division euclidienne: /1, mais obligatoire pour avoir les pts dans la suite)

$6\times1-11+6 = 1 \neq 0$, $6\times4-22+6 \neq 0$ et $6\times9-33+6 \neq 0$ donc 1, 2 et 3 sont les pôles de la partie polaire.

$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 /$

$$\frac{6X^2-11X+6}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3}$$

$$\parallel$$

$$\frac{6X^2-11X+6}{X^3-6X^2+11X-6} \quad \begin{matrix} = P(X) \\ = Q(X). \end{matrix}$$

On a $Q'(X) = 3X^2 - 12X + 11$.

Comme 1 est pôle simple, $a = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{1}{3-12+11} = \frac{1}{2}$.

— 2 — $b = \frac{P(2)}{Q'(2)} = \frac{24-22+6}{12-24+11} = \frac{8}{-1}$

— 3 — $c = \frac{P(3)}{Q'(3)} = \frac{6\times9-33+6}{27-36+11} = \frac{27}{2}$

On peut vérifier que $a+b+c = \frac{1}{2} + \frac{27}{2} - 8 = 14 - 8 = 6$ or $6 = \lim_{X\to+\infty} \frac{X\,P(X)}{Q(X)}$

Noté /3.
(Toutes les méthodes sont acceptées, la multiplicat° évaluation fonctionnait bien aussi)

3

$C(X) = \dfrac{2X^2+1}{(X^2-1)^2}$. deg $(C) = 2-4 = -2$: pas de partie entière (tant mieux pour ceux qui l'auraient oubliée !)

$X^2-1 = (X-1)(X+1)$ or 1 et -1 ne sont pas racines de $2X^2+1$.

Factoriser & donner les pôles : /1

Donc ce sont les 2 pôles (doubles) de C.

Ainsi, $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 /$

$$C(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2}.$$

Donner la D.E.S a priori : /2.

Comme C est paire, on a

$$\frac{a}{-X-1} + \frac{b}{(-X-1)^2} + \frac{c}{-X+1} + \frac{d}{(-X+1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2}$$

i.e $\begin{cases} -a = c \\ b = d. \end{cases}$

Utiliser la parité : +2

On multiplie par $(X-1)^2$:

$$\frac{2X^2+1}{(X+1)^2} = b + \overbrace{a(X-1) + c\frac{(X-1)^2}{X+1} + d\frac{(X-1)^2}{X+1}}^{\text{nul en } 1}$$

on évalue en 1 :

(Mult. évaluation : /1)

$\boxed{\frac{3}{4} = b}$ et donc $\boxed{d = b = \frac{3}{4}}$

Pour trouver a, on évalue C en 0.

$$C(0) = 1 = \frac{a}{-1} + \frac{3}{4} \frac{-a}{1} + \frac{3}{4} = -2a + \frac{3}{2}.$$

Trouver a et c : $/2$

Donc $-2a + \frac{3}{2} = 1$ i.e. $-2a = -\frac{1}{2}$

donc $a = +\frac{1}{4}$. (et $c = -\frac{1}{4}$)

Conclusion $\quad C(X) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2} - \frac{1}{X+1} + \frac{3}{(X+1)^2} \right)$

Problème

1 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, et P le polynôme constant égal à λ. Alors P est solution de $E_{a,b}$ ssi

$$\lambda = \lambda^2 \quad \text{i.e} \quad \text{ssi} \quad \lambda^2 - \lambda = (\lambda - 1) \times \lambda = 0$$

/1

Donc ssi $\lambda \in \{0, 1\}$

Le polynôme constant égal à 1 et le polynôme nul sont les 2 seuls polynômes constants solution.

2 a) En notant $k_1, \dots k_m$ les multiplicités des racines de P et C son coefficient dominant, on a

$$P(X) = C \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{k_i}$$

/2

donc $$P(X+a) = C^2 \prod_{i=1}^{m} (X + a - \lambda_i)^{2k_i}$$

les racines de Q sont donc

$\lambda_1 - a, \dots \lambda_m - a$: il y en a toujours m.

b) $$R(X) = P(X^2) = C \times \prod_{i=1}^{m} (X^2 - \lambda_i)^{k_i}$$

$$= C \prod_{i=1}^{m} (X - \delta_i)^{k_i} \prod_{i=1}^{m} (X + \delta_i)^{k_i}$$

où $\pm \delta_i$ sont les deux racines carrées de λ_i

elles sont bien distinctes des autres valeurs δ_j

en effet si $\delta_i = \delta_j$ pour $i \neq j$, on aurait

$\delta_i^2 = \delta_j^2$ i.e $\lambda_i = \lambda_j$ ce qui est absurde.

TB. 1

en revanche, $+\delta_i$ et $-\delta_i$ ne sont distinctes entre elles que si $\lambda_i \neq 0$.

· Donc si $\lambda_i \neq 0$: on obtient 2 racines distinctes. $\pm \delta_i$

— si $\lambda_i = 0$: on obtient 1 seule racine

3

Conclusion : R admet $2m$ racines si $P(0) \neq 0$

et $2m-1$ racines si $P(0)=0$.

$\boxed{c}$ Si $P \in S_{a,a}$ alors $\underbrace{P(X^2)}_{\text{possède } 2m \text{ racines si } P(0)\neq 0 \text{ et } 2m-1 \text{ sinon.}} = \underbrace{P(X+a)^2}_{\text{possède } m \text{ racines}}$

• Si 0 n'est pas racine de P : on aurait alors $2m = m$ donc $m=0$; absurde car P est non constant.

• Si 0 est racine de P, alors $2m-1 = m$ i.e $m=1$

et 0 est donc la seule racine de P.

Il existe donc une constante $C \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ /

$$P = C \times X^n.$$

On a alors $P(X^2) = C \times X^{2n}$

et le coefficient dominant de $P(X+a)^2$ est C^2 donc $C = C^2$ i.e $C = 0$ ou 1

B.2

Or $C \neq 0$ donc $C = 1$ i.e P est unitaire.

<u>Conclusion</u> : $\exists n \in \mathbb{N}^* / \quad P = X^n$. /3

d) Si $a \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$X^{2n} \neq (X+a)^{2n}$ car les 2 polynômes n'ont pas les mêmes racines (0 pour le 1er et $-a \neq 0$ pour le second).

Donc $\boxed{S_{a,a} = \emptyset}$ /1

Si $a = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $X^{2n} = (X+0)^{2n}$ donc tous les monômes sont solutions. Or d'après 2-c) toutes les solutions sont de la forme X^n

donc $\boxed{S_{0,0} = \{X^n,\ n \in \mathbb{N}^*\}}$ /2

a) Si $\deg Q = n \in \mathbb{N}$, Q admet au plus n racines. /1

b) Si $P(\alpha) = 0$ on a $P(\alpha^2) = \underbrace{P(\alpha)}_{=0} \times P(\alpha+1)$ /1 (cadeau).

i.e $P(\alpha^2) = 0$ donc <u>α^2 est racine de P</u>

c) Si α est racine de P, on vient de voir que α^2 l'est aussi, puis $(\alpha^2)^2 = \alpha^4$ aussi et $(\alpha^4)^2 = \alpha^8$ aussi, par récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est racine de P

Si $a \neq 0$ et $|\alpha| \neq 1$ alors

la suite $\left(a^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ prend une infinité de

valeurs : car pour $n \neq m$ on aura $a^{2^n} \neq a^{2^m}$.

Si bien que P admettrait une infinité de racines.

cela est donc absurde.

On a donc : $\alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$.

d) Si α est racine, alors

$$P((\alpha-1)^2) = P(\alpha-1) \times \underbrace{P(\alpha)}_{=0} = 0$$

donc $(\alpha-1)^2$ est racine

puis $(\alpha-1)^4$, $(\alpha-1)^8$ aussi et par récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha-1)^{2^n}$ est racine de P.

Comme précédemment seul $\alpha - 1 = 0$ ou $|\alpha-1| = 1$

permettent de vérifier que $\left((\alpha-1)^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne prennent

qu'un nb fini de valeurs.

On a donc $\alpha - 1 = 0$ ou $|\alpha - 1| = 1$.

e) On a $(\alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1)$ et $(\alpha = 1$ ou $|\alpha - 1| = 1)$.

Les valeurs 0 et 1 sont bien solutions.

Si $\alpha \notin \{0;1\}$, on doit alors avoir $|\alpha| = 1$ et $|\alpha - 1| = 1$

On a donc $\exists \theta \in [-\pi;\pi[$ $\alpha = e^{i\theta}$

et $\quad |1-e^{i\theta}| = 1 \quad$ i.e $\quad (1-\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2 = 1$.

donc $\quad 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

i.e $\quad -2\cos\theta = -1$

Autrement dit $\quad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad$ donc $\quad \theta = \pm\frac{\pi}{3}$

et $\quad \alpha = e^{\pm i\pi/3}$.

- Mais si $e^{i\pi/3}$ est racine, alors son carré aussi d'après (Q. b) or $e^{2i\pi/3}$ ne satisfait pas $|1-e^{\frac{2i\pi}{3}}| = 1$.
- Idem si $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ est racine, son carré aussi or $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ ne satisfait pas la condition.

<u>Conclusion</u> seuls 0 et 1 peuvent être racines de P.

f) Comme P ne peut avoir que 0 et 1 comme racine,

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{C}^*,\ \exists\, (n,m) \in \mathbb{N}^2 / \quad P = \lambda X^n \times (X-1)^m.$$

On a $\quad P(X^2) = \lambda X^{2n} \times (X^2-1)^m = \lambda X^{2n} (X-1)^n (X+1)^n$

et $\quad P(X)\,P(X+1) = \lambda^2 X^n (X-1)^m \times (X+1)^n \times X^m$

$$= \lambda^2 X^{n+m} (X-1)^m (X+1)^n.$$

On doit donc avoir $\quad \begin{cases} \lambda = \lambda^2 \\ n+m = 2n \\ n = m \end{cases}$

B.S

Comme $\lambda^2 = \lambda$ avec $\lambda \neq 0$ on a $\lambda = 1$.

et la seule condition est $n = m$.

Synthèse : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = X^n \times (X-1)^n$.

On a $P(X^2) = X^{2n}(X-1)^n(X+1)^n$

$= P(X)P(X+1)$

Conclusion : $S_{0,1} = \{ X^n(X-1)^n, n \in \mathbb{N}^* \}$.

Partie 2

Soit $P \in S_{a,b}$.

3) On a $\mathrm{Cd}(P(X^2)) = \mathrm{Cd}(P)$

et $\mathrm{Cd}(P(X)P(X+1)) = \mathrm{Cd}(P)^2$

donc $\mathrm{Cd}(P)^2 = \mathrm{Cd}(P)$ or cette valeur est $\neq 0$

donc $\mathrm{Cd}(P) = 1$ i.e P est unitaire.

4) Soit $(P, Q) \in S_{a,b}^2$.

Alors $PQ(X^2) = P(X^2) \times Q(X^2) = P(X)P(X+1) \times Q(X)Q(X+1)$

$= \underbrace{P(X)}_{} \times PQ(X+1)$ $= PQ(X) \times PQ(X+1)$

Donc $PQ \in S_{a,b}$.

le produit de 2 polynômes de $S_{a,b}$ est aussi dans $S_{a,b}$.

5] Mq $R \in S_{a,b}$.

Supposons que $D \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On a

$$\boxed{R(X)} = P(X+a)\big(P(X+b)-Q(X+b)\big) + \big(P(X+a)-Q(X+a)\big)\,Q(X+b)$$

$$= \underbrace{P(X+a)\,P(X+b)}_{=P(X^2)} \cancel{-P(X+a)Q(X+b)} \cancel{+P(X+a)Q(X+b)} - \underbrace{Q(X+a)\,Q(X+b)}_{=Q(X^2)}$$

$$= \boxed{D(X^2)}$$

On a donc ~~$\deg(R) = 2\deg(D)$~~.

Or $\deg(R) \leq \max\big(\deg D + \deg P \,;\, \deg D + \underbrace{\deg Q}_{=\deg P}\big)$

$$= \deg D + \deg P$$

- De plus $C_d\big(P(X+a)D(X+b)\big) = C_d(D) \times \underbrace{C_d(P)}_{=1} = C_d(D)$

et $C_d\big(D(X+a)Q(X+b)\big) = C_d(D)$

Ces deux polynômes sont de m̄ degré et ont le m̄ coeff. dominant donc R est aussi de degré $\deg(D)+\deg(P)$ (et son coeff dominant est $2\,C_d(D)$).

- D'autre part $C_d(P) = 1$ et $C_d(-Q) = -1$

donc $\deg(P-Q) < \deg(P)$

On a donc $\deg(R) = \deg(D) + \underbrace{\deg(P)}_{>\deg(D)} > 2\deg(D)$

$\quad\|$

$2\deg(D)$

B7

donc l'hypothèse $D \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$ est absurde.

On a donc $D = 0_{\mathbb{C}[X]}$ ie $P = Q$.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il y a au plus un polynôme de degré n appartenant à $S_{a,b}$.

[7] En particulier, pour n_0 étant la valeur du plus petit degré on a : $\exists ! \, P \,/\, \deg(P) = n_0$ et $P \in S_{a,b}$.

[8] Si $B \neq 0$ on considère la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$, on a

$$\prod_{k=1}^{n} (A - \omega_k B) = \prod_{k=1}^{n} \left(B \times \left(\frac{A}{B} - \omega_k\right)\right) = B^n \times \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{A}{B} - \omega_k\right)$$

$$= B^n \times P \circ \left(\frac{A}{B}\right)$$

où P est le polynôme : $P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \omega_k) = X^n - 1$.

Donc $\boxed{\prod_{k=1}^{n} (A - \omega_k B) = B^n \times \left(\left(\frac{A}{B}\right)^n - 1\right) = A^n - B^n}$

• Si $B = 0$ alors $\prod_{k=1}^{n} (A - \underbrace{\omega_k B}_{=0}) = \left(\prod_{k=1}^{n} A\right) = A^n$

or $A^n - 0^n = A^n$ donc le résultat reste vrai

Conclusion : $\forall (A,B) \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$A^n - B^n = \prod_{k=1}^{n} (A - \omega_k B)$$

D-8

9] Si $P^n \in S_{a,b}$ on a alors

$$\underbrace{P^n(X^2) - P^n(X+a)\, P^n(X+b)}_{} = 0$$

$\underset{\text{D'après Q.8}}{=\!=}$ $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(P(X^2) - \omega_k\, P(X+a) P(X+b) \right) = 0$

Comme $\mathbb{C}[X]$ est intègre, ce produit étant nul, comporte nécessairement un facteur nul, i.e

$\exists k \in [\![1,n]\!] \,/\quad P(X^2) = \omega_k\, P(X+a) P(X+b)$

Comme P est unitaire, le coeff dominant du polynôme de gauche est 1, celui de droite est ω_k.

Donc $\omega_k = 1$, et l'on a finalement

$$P(X^2) = P(X+a)\, P(X+b)$$

i.e $\boxed{P \in S_{a,b}}$

10 On a $\deg(M^s) = s\deg(M) = ms = \delta rs$

$\deg(P^r) = r\deg(P) = rn = r\delta s$

Comme $\delta rs = r\delta s$ on a bien

$$\deg(M^s) = \deg(P^r).$$

D'après Q.6, si deux polynômes de $S_{a,b}$ ont le $\bar{m}$ degré, ils sont égaux d'où $\underline{\underline{M^s = P^r}}$.

11 On a

$$\begin{aligned} M^s &= \prod_{k=1}^{q} (X-\lambda_k)^{s\alpha_k} \\ &\shortparallel \\ P^r &= \prod_{k=1}^{q} (X-\lambda_k)^{r\beta_k} \end{aligned}$$

donc $s\alpha_k = r\beta_k$ donc $r \mid s\alpha_k$ or $r \wedge s = 1$

d'où $r \mid \alpha_k$.

Ainsi, $\exists \gamma_k \in \mathbb{N}^* \,/\, \alpha_k = r\gamma_k$.

12 $Q = \prod_{k=1}^{n} (X-\lambda_k)^{\gamma_k}$

On a donc $Q^r = \prod_{k=1}^{n} (X-\lambda_k)^{\overbrace{r\gamma_k}^{= \alpha_k}} = M$

Comme $Q^r = M \in S_{a,b}$ d'après Q.9, on a aussi

$Q \in S_{a,b}$.

Or $\deg(M) = r\deg(Q)$ et $\deg(M)$ étant minimal parmi les polynômes de $S_{a,b}$, on a $\deg(M) \geq \deg(Q)$

i.e $r \deg(Q) \geq \deg(Q)$.

Comme $\deg(Q) \neq 0$ (car Q a q racines) on a $\boxed{r=1}$

On a donc $m = \delta$ et $n = \delta d = md$.

On a donc $\boxed{\deg(P) = md = \deg(M^d)}$

de plus, d'après Q.5, $M^d \in S_{a,b}$

et d'après Q.6, il n'y a qu'un seul polynôme de $S_{a,b}$ dont le degré est celui-ci, ce qui signifie : $\boxed{P = M^d}$

13) D'après Q.5, on sait que $M \in S_{a,b}$ puis $M^2 \in S_{a,b}$ et par récurrence $M^n \in S_{a,b}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi $\{M^n, n \in \mathbb{N}^*\} \subset S_{a,b}$.

D'après Q.12, on a l'autre inclusion : tout polynôme de $S_{a,b}$ est une puissance de M.

Conclusion $S_{a,b} = \{M^n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

14 **a)** Soit $P \in S_{a,b}$ de degré 1.

On sait que P est unitaire, donc $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ /

$$P = X + \lambda.$$

On a donc $P(X^2) = X^2 + \lambda$

et $P(X+a)P(X+b) =$

$$= (X+a+\lambda)(X+b+\lambda) = X^2 + (a+b+2\lambda)X + (a+\lambda)(b+\lambda)$$

Comme $P \in S_{a,b}$, ces deux polynômes, on

a $\begin{cases} a+b+2\lambda = 0 \\ (a+\lambda)(b+\lambda) = \lambda \end{cases}$

en particulier, $\lambda = -\dfrac{a+b}{2}$ i.e $\lambda = -c$

Donc $\boxed{P = X - c}$

b) de même $(a+\lambda)(b+\lambda) = \lambda$ i.e $\underbrace{(a-c)}\underbrace{(b-c)} = -c$

d'où $\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2}\right)\left(\dfrac{b}{2} - \dfrac{a}{2}\right) = -c$

i.e $\boxed{c = d^2}$

c) Supposons que $\underline{c = d^2}$ alors posons $P = X - c$.

On a $P(X^2) = X^2 - c = X^2 - d^2$

et $P(X+a)P(X+b) = (X + a - c)(X + b - c)$

$$= X^2 + (a+b-2c)X + \left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$= X^2 - d^2$$

Donc $P \in S_{a,b}$

b) On a

$$P(X^2) = (X^2-c)^2 + \beta = X^4 - 2cX^2 + \beta + c^2$$

et $P(X+a)\,P(X+b) = \left((X+\underbrace{a-c}_{=-d})^2+\beta\right)\left((X+\underbrace{b-c}_{=d})^2+\beta\right)$

$$= (X^2-2dX+d^2+\beta)(X^2+2dX+d^2+\beta)$$

$$= X^4 + (d^2+\beta-4d^2+d^2+\beta)X^2 + (d^2+\beta)^2$$

Donc $P \in S_{a,b} \iff \begin{cases} 1 = 1 \\ -2d^2+2\beta = -2c \\ (d^2+\beta)^2 = \beta+c^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = d^2-c \\ (2d^2-c)^2 = d^2+c^2-c \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \beta = d^2-c \\ 4d^4-4cd^2+\cancel{c^2} = d^2+\cancel{c^2}-c \end{cases}$$

c] $d^2 = \frac{1}{4} \iff d = \pm\frac{1}{2} \iff \left|\frac{b-a}{2}\right| = \frac{1}{2} \iff |b-a| = 1$

donc $\iff b = a \pm 1$.

Si $c \neq \frac{1}{4} = d^2$, il n'y a pas de polynôme de degré 1 dans $S_{a,b}$.

et le polynôme $(X-c)^2 + \beta$ est solution.

D'après Q.13, $S_{a,b} = \{ M^n, n \in \mathbb{N}^* \}$.

16] $P(X^2) = (X^2-c)^3 + \alpha(X^2-c)^2 + \beta(X^2-c) + \gamma$

et $P(X+a)P(X+b) = \Big(\overbrace{(X+d)^3}^{= X^3 + 3dX^2 + \dots} + \alpha(X+d)^2 + \beta(X+d) + \gamma\Big) \times$

$\Big(\underbrace{(X-d)^3}_{= X^3 - 3dX^2 + \dots} + \alpha(X-d)^2 + \beta(X-d) + \gamma\Big)$

Le coefficient de X^5 de ce polynôme est

$-3d + \alpha + 3d + \alpha = 2\alpha$.

Dans $P(X^2)$ ce coeff est nul (polynôme pair)

donc si $P \in S_{a,b}$, on a $\alpha = 0$.

On a aussi

$P(0^2) = \gamma$

et $P(a)P(b) = (d^3 + \beta d + \gamma)(-d^3 - \beta d + \gamma)$

Le coefficient de X dans

$$\left((X^3+3\alpha X^2+3\alpha^2 X+\alpha^3)+\beta(X+\alpha)+\gamma\right)\times\left((X^3-3\alpha X^2+3\alpha^2 X-\alpha^3)+\beta(X-\alpha)+\gamma\right)$$

est $(3\alpha^2+\beta)(\gamma-\beta\alpha-\alpha^3)+(\alpha^3+\beta\alpha+\gamma)(3\alpha^2+\beta)$

$$= (3\alpha^2+\beta)\times 2\gamma$$

3.b) $P(X^2)=(X^2-c)^3+\beta(X^2-c)$

et $P(X+a)\,P(X+b)=\left((X-\alpha)^3+\beta(X-\alpha)\right)\times\left((X+\alpha)^3+\beta(X+\alpha)\right)$

$$=(X^2-\alpha^2)^3+\beta\underbrace{\left((X-\alpha)^3(X+\alpha)+(X-\alpha)(X+\alpha)^3\right)}_{=(X^2-\alpha^2)\times[X^2-2\alpha X+\alpha^2+X^2+2\alpha X+\alpha^2]}+\beta^2(X^2-\alpha^2)$$

$$= X^6-3\alpha^2X^4+3\alpha^4X^2+\alpha^6+\underbrace{\beta(X^2-\alpha^2)\times 2(X^2+\alpha^2)}_{=2\beta(X^4-\alpha^4)}+\beta^2(X^2-\alpha^2)$$

$$= X^6+(2\beta-3\alpha^2)X^4+(3\alpha^4+\beta^2)X^2+\alpha^6-2\beta\alpha^2-\beta^2\alpha^2.$$

Or $= X^6-3cX^4+(3c^2+\beta)X^2-c^3-\beta c$